Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
— Mise en évidence des résultats
— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(d'après I.S.F.A 2006)

Soit $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ continues à valeurs réelles. Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ on note F l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

Soit E le sous-ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $f \in E$ on note $I(f)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie I — Étude de quelques propriétés de l'application $f \mapsto I(f)$

1. Déterminer les fonctions f de E positives et telles que $I(f) = 0$.
2. Soit f une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ positive. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $f \in E$.

   On pourra utiliser une intégration par parties.
3. Donner un exemple de fonction f appartenant à E et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
4. Pour $f \in E$, montrer, en justifiant l'existence de l'intégrale, la relation

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t) + F\left(\frac{1}{t}\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Partie II — Un cas particulier

On note J et K les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^1 \frac{-\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que les intégrales J et K convergent.
2. Montrer l'égalité des intégrales J et K
3. (a) Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln(t)}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t)^k \ln(t) + \dfrac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(n+1)^2}$

   (c) Justifier qu'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall t \in]0,1], \qquad \left|\frac{t\ln(t)}{1+t}\right| \leqslant M$$

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$

   (e) On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

   Montrer enfin que la valeur commune à J et K est égale à $-\dfrac{\pi^2}{12}$.
4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   (a) Montrer que f appartient à E

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   (c) Exprimer $F(1)$ en fonction de K
5. (a) Calculer, pour $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (b) Montrer que $I(f) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K$
6. Exprimer J en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t$
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t$
8. En déduire $I(f)$.

Exercice 2

(d'après Oral ESCP)

Préambule

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque

$$\forall (x,y) \in I, \quad \forall t \in [0,1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

1. Soit f une fonction dérivable sur I. Soit $(x,y) \in I$ avec $x < y$ et soit $t \in [0,1]$.

   (a) Montrer qu'il existe $a \in [x, tx+(1-t)y]$ tel que $f(tx+(1-t)y) - f(x) = (1-t)(y-x)f'(a)$

   (b) Montrer qu'il existe $b \in [tx+(1-t)y, y]$ tel que $f(y) - f(tx+(1-t)y) = t(y-x)f'(b)$
2. On suppose que f' est croissante, montrer qu'alors

   $$t\left(f(tx+(1-t)y) - f(x)\right) \leqslant (1-t)f(y) - f(tx+(1-t)y)$$

   En déduire que f est convexe.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Partie I — Inégalité de Hölder

4. Soit f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0, 1]$
   (a) Montrer que, pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$
   (b) Montrer que
   $$\forall t > 0, \qquad (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda) g(t)$$
   (c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$
5. Soit f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Soit λ un réel de $[0, 1]$
   En utilisant la question précédente, montrer que
   $$\int_0^{+\infty} (f(t))^\lambda (g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}$$

Partie II — Fonctions Gamma et lnGamma

6. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   On note alors, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *on pourra procéder à une intégration par parties*
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
7. On définit la fonction G sur $]0, +\infty[$ par $G : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$
   (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et tout couple $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, on a
   $$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$
   (b) Que peut-on en déduire sur la fonction G ?
8. Soit x et y deux réels strictement positifs, on suppose que $y \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $G(x+1) \leqslant \left(1 - \frac{1}{y}\right) G(x) + \frac{1}{y} G(x+y)$
   (b) En déduire que $\Gamma(x+y) \geqslant x^y \Gamma(x)$
9. Soit x et y deux réels strictement positifs avec $y \leqslant 1$. Montrer que
   $$\Gamma(x+y) \leqslant x^y \Gamma(x)$$

Exercice 3 — Endomorphismes cycliques

(inspiré de Maths B 2012)

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique si, et seulement s'il existe un vecteur x de E et un entier n tel que la famille $\left(x, u(x), u^2(x), u^3(x), \cdots, u^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.

On rappelle que $u^0 = Id_E$ et que, pour tout entier k strictement positif $u^k = u \circ u^{k-1}$.

1. Dans cette question, $n = 3$. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base canonique de E est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est cyclique.

2. Soit $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

   (c) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que, si P est de degré k, $\varphi(P)$ est de degré $k-1$.

   (d) En déduire $\text{Im}(\varphi)$.

   (e) Montrer que φ est un endomorphisme cyclique.

3. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On rappelle que $n = \dim(E)$. Montrer que u est cyclique.

4. Soit φ un endomorphisme cyclique de E. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$ où $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

5. Justifier qu'alors $\text{Rang}(\varphi) \geqslant n-1$.

Exercice 4 Endomorphismes échangeurs

— On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété $(\mathcal{P}1)$ lorsqu'il existe deux endomorphismes a et b de E vérifiant les trois égalités

$$u = a + b, \qquad a^2 = 0, \qquad b^2 = 0 \tag{$\mathcal{P}1$}$$

(0 désignant l'endomorphisme nul, et $a^2 = a \circ a$).

— On dit qu'un endomorphisme u de E possède la propriété $(\mathcal{P}2)$ lorsqu'il existe deux sous-espaces vectoriels (s.e.v) F et G de E vérifiant les trois propriétés

$$E = F \oplus G, \qquad u(F) \subset G, \qquad u(G) \subset F \tag{$\mathcal{P}2$}$$

1. **Un exemple :** Dans cette question seulement, E désigne $\mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Justifier que f vérifie $(\mathcal{P}2)$.

2. On suppose dans cette question que u vérifie $(\mathcal{P}2)$. On considère deux s.e.v F et G de E vérifiant les trois propriétés $(\mathcal{P}2)$. On note p la projection sur F parallèlement à G et on définit enfin $a = u \circ p$.

   (a) Montrer que, si $x \in E$, $a(x) \in G$, puis $a^2(x) = 0_E$.

   (b) Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}1)$.

3. On suppose dans cette question que u vérifie $(\mathcal{P}1)$. On note a et b deux endomorphismes vérifiant les égalités $(\mathcal{P}1)$. On suppose de plus $u \in \mathcal{GL}(E)$.

(a) Établir une inclusion entre $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.
(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(a)$. Montrer que $u(x) \in \mathrm{Im}(b)$.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) = \{0_E\}$.
(d) Montrer que $\mathrm{Im}(a+b) \subset \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$
(e) Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$

4. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$ (*on pourra considérer un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(u)$ *dans* E).
5. On considère dans cette question un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On rappelle que $n = \dim(E)$. On suppose que n est pair $n = 2m$.
   (a) Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Ker}(u^{n-1})$. Montrer que $\big(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.
   (b) En considérant la base $\mathcal{B}' = \big(x_0, u^2(x_0), \dots, u^{2m-2}(x_0), u(x_0), u^3(x_0), \dots, u^{2m-1}(x_0)\big)$, montrer que u vérifie $(\mathcal{P}2)$.

Corrigé

Avant propos :

Ce sujet est très long, bien trop long pour être fini en 4 heures. Dans ce genre de situation il est important d'indentifier dès le début les exercices/parties dans lesquels on est le plus à l'aise et commencer par ceux-ci.

En particulier dans ce sujet l'exercice 1 est probablement le plus complexe et il n'est pas forcement pertinent de commencer par lui.

Enfin, essayer de changer de feuille entre chaque partie/exercice. Cela améliore la lisibilité de votre copie et vous permet de revenir en arrière par reprendre des questions que vous n'auriez pas forcement su faire du premier coup.

Corrigé de l'exercice 1

Partie I — Étude de quelques propriétés de l'application $f \mapsto I(f)$

1. Soit $f \in E$ positive et telle que $I(f) = 0$. Soit F l'unique primitive de f qui s'annule en 0.

   Comme $F' = f$ est positive, F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $F(0) = 0$, ainsi F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{F(t)}{(1+t)^2}$ est une fonction positive et continue d'intégrale nulle sur $]0, +\infty[$, elle est donc nulle sur cet intervalle.

   Ainsi, F est la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ et par conséquent f est nulle également.

   Réciproquement si f est la fonction nulle alors F est constante. Comme $F(0) = 0$, F est la fonction nulle et donc $I(f) = 0$.

   Finalement $\boxed{\text{la fonction nulle est la seule fonction positive } f \in E \text{ telle que } I(f) = 0.}$

2. Soit f une fonction de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ positive. Comme vu dans la question précédente F est alors croissante et positive.

   Les fonctions F et $t \mapsto \dfrac{-1}{1+t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $A > 0$ on a alors

$$\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(A)}{1+A} + \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

   I.P.P — On ne sait pas si $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{F(A)}{1+A}$ existe donc on ne peut pas conclure à ce stade.

   En particulier

$$\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

   Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge alors, par positivité de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ on a

$$\forall A > 0, \qquad \int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{F(t)}{(1+t)^2}$ est positive et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge alors, par croissance de F,

$$\frac{F(A)}{1+A} = \int_A^{+\infty} \frac{F(A)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

   Ainsi

$$\int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{F(A)}{1+A} \leqslant \int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ est positive et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est majorée, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } f \in E.}$

En plus

On a de plus montré que, dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \dfrac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Compte tenu du résultat de la question précédente il nous faut chercher une fonction qui n'est pas de signe constant.

Posons $F : t \mapsto (1+t)\sin(t)$. F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F(0) = 0$.

On a, pour $t \geqslant 0$, $f(t) = F'(t) = (1+t)\cos(t) + \sin(t)$.

Pour $t \geqslant 0$ on a $\dfrac{F(t)}{(1+t)^2} = \dfrac{\sin(t)}{1+t}$

Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. De plus $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{-\cos(t)}{1+t} = -1$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \dfrac{-\cos(t)}{1+t} = 0$.

Ainsi, d'après la formule de changement de variable $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{-\cos(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Pour $t \geqslant 0$ on a $\left|\dfrac{-\cos(t)}{(1+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^2}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ est positive, continue sur $[0,+\infty[$. De plus $\dfrac{1}{(1+t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann.

Par critère d'équivalence pour les fonctions positives on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Par majoration l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{-\cos(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est alors absolument convergente donc convergente. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge, i.e. $f \in E$.

On a par contre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{1+t} + \cos(t)\,\mathrm{d}t$

On a montré précédemment que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge. Par contre, pour $x > 0$ on a $\displaystyle\int_0^{x} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$ qui n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Finalement $\boxed{\text{en prenant } f : t \mapsto (1+t)\cos(t) + \sin(t) \text{ on a } f \in E \text{ mais } \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

4. Soit $f \in E$, on va appliquer la formule de changement de variable dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $s = \dfrac{1}{t}$.

On a alors $\mathrm{d}s = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -s^2\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{s^2}\mathrm{d}s$

Ainsi

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{+\infty}^{0} \frac{F\left(\frac{1}{s}\right)}{\left(1+\frac{1}{s}\right)^2}\frac{-1}{s^2}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{F\left(\frac{1}{s}\right)}{s^2\left(1+\frac{1}{s}\right)^2} \, \mathrm{d}s$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{F\left(\frac{1}{s}\right)}{(s+1)^2} \, \mathrm{d}s$$

On a alors

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{2}I(f) + \frac{1}{2}I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F\left(\frac{1}{t}\right)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F\left(\frac{1}{t}\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t}$$

$\boxed{\text{L'intégrale } \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F\left(\frac{1}{t}\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes.}}$

Partie II — Un cas particulier

On note J et K les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^1 \frac{-\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $t \in]0,1[$ on a $\left|\frac{\ln(t)}{1+t}\right| \leqslant |\ln(t)|$.

   Or $\int_0^1 |\ln(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, par majoration $\boxed{J \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

   La fonction $t \mapsto \frac{-\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus $\frac{-\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t}{t} = -1$. La fonction $t \mapsto \frac{-\ln(1+t)}{t}$ est donc prolongeable par continuité en 0.

   Ainsi $\int_0^1 \frac{-\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre et donc $\boxed{K \text{ converge.}}$
2. On va réaliser une intégration par parties.

   Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ sont continue sur $]0,1[$. De plus $\lim\limits_{t\to 1} \ln(t)\ln(1+t) = 0$ et $\ln(1+t)\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi, par la formule d'intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

   C'est-à-dire $\boxed{J = K}$.
3. (a) Pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$$

   D'où

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$$

   et donc, en multipliant par $\ln(t)$

$$\boxed{\forall t \in]0,1], \qquad \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \ln(t) + \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}}$$

   (b) Remarquons d'abord que l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout n. En effet il s'agit d'une intégrale de référence pour $n = 0$ ert elle est faussement impropre si $n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. De plus $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t) = 0$

Par intégration par parties on a alors

$$\boxed{\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

(c) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\ln(t)}{1+t} = 0$, g est donc prolongeable par continuité en 0.

La théorème des bornes de Weierstrass nous assure alors que g est bornée sur $]0,1]$, ainsi $\boxed{\text{Il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que}}$

$$\boxed{\forall t \in]0,1], \qquad \left|\frac{t\ln(t)}{1+t}\right| \leqslant M}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 t^n \left|\frac{t\ln(t)}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant Mt^n\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M}{n+1}
\end{aligned}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} int_0^1 \dfrac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$

(e) On a

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \ln(t) + \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi^2}{12} + 0
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite on a ainsi $\boxed{J = K = \dfrac{-\pi^2}{12}.}$

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(a) f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonction continues. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. f est donc continue sur $[0,+\infty[$.

f est de plus positive sur $[0,+\infty[$, elle partient à E si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus $t^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(t)}{t(1+t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées, ainsi $\dfrac{f(t)}{1+t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann, ainsi par négligeabilité $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement $\boxed{f \text{ appartient à } E.}$

(b) Pour $x > 0$ on a $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est positive. Il nous faut donc montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Comme $\ln(1+t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ on a $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a donc bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

(c) On a

$$\boxed{F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -K}$$

5. (a) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x} \\
&= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x} \\
&= \frac{\ln(x)}{x}
\end{aligned}$$

Pour $x \in]0,+\infty[$ notons $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On a alors

$$G(x) = G(1) + \int_1^x G'(t)\,\mathrm{d}t = 2F(1) + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -2K + \frac{\ln(x)^2}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \qquad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)^2}{2} - 2K}$$

(b) D'après la question 4. de la partie I on a alors

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t) + F\left(\frac{1}{t}\right)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{2} - \frac{2K}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K\left(\frac{1}{1+0} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}\right)$$
$$\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K$$

Ainsi
$$boxed I(f) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K$$

6. Exprimer J en fonction de l'intégrale On a
$$\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1\left(\frac{1}{t}\ln(t)\right)\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{ln(t)^2}{2}$ et $t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$. $\lim_{t\to0}\frac{ln(t)^2}{2}\frac{t}{1+t} = 0$ et $\lim_{t\to1}\frac{ln(t)^2}{2}\frac{t}{1+t} = 0$.

Par intégration par parties on a alors
$$\int_0^1\left(\frac{1}{t}\ln(t)\right)\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^1\frac{\ln(t)^2}{2}\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\boxed{J = -\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t}$

7. On va poser le changement de variable $s = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale convergente $\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t$

On a alors
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t &= \int_{+\infty}^1\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{s}\right)}{1+\frac{1}{s}}\right)^2\frac{-1}{s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_1^{+\infty}\left(\frac{-\ln(s)}{1+s}\right)^2 \mathrm{d}s \\ &= \int_1^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t}$$

8. On a finalement
$$\begin{aligned}I(f) &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{1+t}\right)^2 \mathrm{d}t - K \\ &= -\frac{1}{2}J - K \\ &= \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{12} \\ &= \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{I(f) = \dfrac{\pi^2}{8}}$.

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) f est dérivable sur $[x, tx + (1-t)y]$, d'après l'égalité des accroissements finis il existe $a \in [x, tx + (1-t)y]$ tel que $f'(a)\,(tx + (1-t)y - x) = f(tx + (1-t)y) - f(x)$.

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe } a \in [x, tx + (1-t)y] \text{ tel que } f(tx + (1-t)y) - f(x) = (1-t)(y-x)f'(a)}$

   (b) En appliquant l'égalité des accroissements finis à f entre $tx + (1-t)y$ et y on montre de manière similaire que $\boxed{\text{il existe } b \in [tx + (1-t)y, y] \text{ tel que } f(y) - f(tx + (1-t)y) = t(y-x)f'(b).}$

2. On a $a \leqslant tx + (1-t)y \leqslant b$. Par croissance de f' on a $f'(a) \leqslant f'(b)$, d'où

$$\frac{f(tx + (1-t)y) - f(x)}{(1-t)(y-x)} \leqslant \frac{f(y) - f(tx + (1-t)y)}{t(y-x)}$$

En multipliant par $t(1-t)(y-x) \geqslant 0$ on a alors

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant (1-t)\left(f(y) - f(tx + (1-t)y)\right)$$

D'où

$$t\left(f(tx + (1-t)y) - f(x)\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

$\boxed{f \text{ est donc convexe.}}$

3. Soit $f : x \mapsto -\ln(x)$.

   f est deux fois dérivable et, pour $x > 0$ on a $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$. Ainsi f' est croissante et donc $\boxed{f \text{ est convexe.}}$

Partie I — Inégalité de Hölder

4. Soit f et g deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0,1]$

   (a) Soit $(x,y) \in]0, +\infty[^2$.

   Par convexité de la fonction $-\ln$ sur $]0, +\infty$ on a

$$-\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda(-\ln(x)) + (1-\lambda)(-\ln(y))$$

   D'où

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2 \qquad \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)}$$

   (b) D'après la question précédente on a

$$\forall t > 0, \qquad \ln(\lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)) \geqslant \lambda \ln(f(t)) + (1-\lambda)\ln(g(t))$$

   D'où, par croissance de la fonction exponentielle

$$\forall t > 0, \qquad \exp\left(\ln(\lambda f(t) + (1-\lambda)g(t))\right) \geqslant \exp\left(\lambda \ln(f(t)) + (1-\lambda)\ln(g(t))\right)$$

   C'est-à-dire

$$\boxed{\forall t > 0, \qquad (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda} \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)}$$

   (c) Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent d'où, par majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

   De plus

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + (1-\lambda)\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda + 1 - \lambda \leqslant 1}$$

5. Posons $\tilde{f} = \dfrac{f}{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$ et $\tilde{g} = \dfrac{g}{\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t}$.

   $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs strictement positives telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tilde{g}(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 1. Soit λ un réel de $[0, 1]$

   D'après la question précédente on a

$$\int_0^{+\infty} (\tilde{f}(t))^{\lambda}(\tilde{g}(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$$

   C'est-à-dire

$$\frac{\int_0^{+\infty} f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}} \leqslant 1$$

   D'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (f(t))^{\lambda}(g(t))^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda}}$$

Partie II — Fonctions Gamma et lnGamma

6. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue positive sur $]0, +\infty[$.

   De plus $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann si $x - 1 > -1$, i.e. si $x > 0$ ce qui est bien le cas

   Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge

   Par croissance comparée on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = 0$, i.e. $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{1}{t^2}$.

   Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,,\mathrm{d}t$ converge on en déduit par négligeabilité que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement $\boxed{\text{pour tout } x > 0\text{, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

   (a) Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est positive sur $]0, +\infty[$, ainsi $\Gamma(x) \geqslant 0$.

   Supposons par l'absurde que $\Gamma(x) = 0$. Alors la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue positive et d'intégrale nulle sur $]0, +\infty[$, elle est alors nulle sur $]0, +\infty[$ ce qui est absurde.

   Ainsi $\boxed{\Gamma(x) > 0}$.

   (b) Soit $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0$.

   Ainsi, par intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t)$$

   C'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$

   (c) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$ on a $\Gamma(0+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0!$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\Gamma(n+1) = n!$.

Alors $\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!.}$

7. (a) Soit $\lambda \in]0,1[$ et $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a

   On applique le résultat de la question 5. aux fonctions $f : t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ et $g : t \mapsto t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}$

   On a alors
$$\int_0^{+\infty} \left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^\lambda \left(t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^{1-\lambda} \,\mathrm{d}t \leqslant \Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}$$
   Ainsi
$$\int_0^{+\infty} t^{\lambda x-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{(1-\lambda)y-(1-\lambda)}\mathrm{e}^{-(1-\lambda)t}\,\mathrm{d}t \leqslant \Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}$$
   D'où
$$\int_0^{+\infty} t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}$$
   C'est-à-dire
$$\boxed{\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}}$$

   (b) On a alors, pour $\lambda \in]0,1[$ et $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ par croissance de la fonction ln
$$G(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda G(x)+(1-\lambda)G(y)$$
   Ainsi $\boxed{G \text{ est convexe.}}$

Fonction Γ

On peut en fait prouver que la fonction Γ est la seule fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = n!$ et $\ln(f)$ est convexe.

8. Soit x et y deux réels strictement positifs avec $y \geqslant 1$.

   (a) On a alors, comme $1 - \dfrac{1}{y} \geqslant 0$
$$G(x+1) = G\left(\left(1-\frac{1}{y}\right)x\frac{1}{y}(x+y)\right)$$
   D'où, par convexité de la fonction G on a bien
$$\boxed{G(x+1) \leqslant \left(1-\frac{1}{y}\right)G(x)+\frac{1}{y}G(x+y)}$$

   (b) Par croissance de la fonction exponentielle on a alors
$$\Gamma(x+1) \leqslant \Gamma(x)^{1-\frac{1}{y}}\Gamma(x+y)^{\frac{1}{y}}$$
   Ainsi
$$x\Gamma(x) \leqslant \Gamma(x)^{1-\frac{1}{y}}\Gamma(x+y)^{\frac{1}{y}}$$
   Comme $\Gamma(x) > 0$ on a alors
$$x\Gamma(x)^{\frac{1}{y}} \leqslant \Gamma(x+y)^{\frac{1}{y}}$$
   Par croissance de la fonction $t \mapsto t^y$ on en déduit que $\boxed{\Gamma(x+y) \geqslant x^y\Gamma(x).}$

9. Soit x et y deux réels strictement positifs avec $y \leqslant 1$. On a alors,
$$G(x+y) = G(y(x+1)x+(1-y)x)$$
   D'où, par convexité de la fonction G on a
$$G(x+y) \leqslant yG(x+1)+(1-y)G(x)$$
   Par croissance de la fonction exponentielle on a alors
$$\Gamma(x+y) \leqslant \Gamma(x+1)^y\Gamma(x)^{1-y}$$

Ainsi

$$\Gamma(x+y) \leqslant x^y \Gamma(x)^y \Gamma(x)^{1-y}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\Gamma(x+y) \leqslant x^y \Gamma(x)}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a $g(e_1) = e_2$ et $g(e_2) = e_3$.

   Ainsi $g^2(e_1) = e_3$. La famille $(e_1, g(e_1), g^2(e_1))$ est donc la famille (e_1, e_2, e_3) qui est une base de $\mathbb{R}^3$

   $\boxed{g \text{ est donc bien cyclique.}}$

2. Soit $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

   (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg(\varphi(P)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(P(X+1)) \leqslant n$. Ainsi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

   Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a alors

   $$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\ &= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q) \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

   (b) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a alors $P(X+1) = P(X)$

   Supposons que P ne soit pas constant, il admet alors au moins une racine complexe α.

   On va montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P.

   Initialisation :

   α est bien une racine de P.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\alpha + n$ est une racine de P, alors $P(\alpha+n+1) = P(\alpha+n) = 0$.

   Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   P admet alors une infinité de racines, ce qui est absurde car P n'est pas le polynôme nul.

   Ainsi, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors P est constant. Réciproquement si P est constant alors $P(X+1) = P(X)$ d'où $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

   Finalement $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]}$.

   > **Récurrence**
   >
   > Même lorsque la récurrence vous parait évidente prenez le temps de la rédiger. Évitez autant que possible d'affirmer que quelque chose est évident ou trivial.

   (c) On va procéder par récurrence forte sur k.

   Initialisation :

   Soit $P = aX + b$ avec $a \neq 0$, alors $\varphi(P) = a$ et donc $\deg(\varphi(P)) = 0 = 1 - 1$

   Hérédité :

   Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose que, si P est de degré $j \in [\![1, k-1]\!]$ alors $\deg(\varphi(P)) = j - 1$.

   Soit P un polynôme de degré k. On écrit alors $P = a_k X^k + Q$ où $\deg(Q) \leqslant k - 1$.

   Alors

   $$\begin{aligned} \varphi(P) &= a_k \varphi(X^k) + \varphi(Q) \\ &= a_k((X+1)^k - X^k) + \varphi(Q) \\ &= a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j + \varphi(Q) \\ &= k a_k X^{k-1} + a_k \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j + \varphi(Q) \end{aligned}$$

$\deg(a_k \displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} X^j) \leqslant k-2$ et, par hypothèse de récurrence, $\deg(\varphi(Q)) \leqslant k-2$, ainsi $\varphi(P)$ est de degré $k-1$.

Ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

On a ainsi montré que, $\boxed{\text{si } P \text{ est de degré } k \in [\![1, n-1]\!] \text{ alors } \deg(\varphi(P)) = k-1.}$

(d) La question précédente nous assure que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1$, d'après le théorème du rang on a ainsi $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n+1-1 = n$.

Par inclusion et égalité des dimensions on en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(e) On va montrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\deg(\varphi^k(X^n)) = n-k$

Initialisation :

Pour $k=0$ on a $\deg(\varphi^0(X^n)) = \deg(X^n) = n$.

Hérédité :

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on suppose que $\deg(\varphi^k(X^n)) = n-k$.

Alors, d'après la question 2.(c) on a

$$\deg(\varphi^{k+1}(X^n)) = \deg(\varphi(\varphi^k(X^n))) = \deg(\varphi^k(X^n)) - 1 = n-(k+1)$$

Ce qui prouve le propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

La famille $(X^n, \varphi(X^n), \cdots, \varphi^k(X^n), \varphi^n(X^n))$ est alors une famille de polynômes non-nuls échelonnée en degrés, elle est donc libre.

La famille $(X^n, \varphi(X^n), \cdots, \varphi^k(X^n), \varphi^n(X^n))$ est alors une famille libre de cardinal $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme cyclique.}}$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Puisque u^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul il existe alors $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$.

On va alors montrer que la famille $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Comme il s'agit d'une famille de cardinal n dans E qui est dimension n il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$.

On va montrer par récurrence forte que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

Initialisation :

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k(x) = 0$, d'où, en appliquant u^{n-1}, par linéarité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{k+n-1}(x) = 0$

Or $u^n = 0$ d'où $u^{n+k-1}(x) = 0_E$ si $n+k-1 \geqslant n$, i.e. si $k \geqslant 1$.

Ainsi $\lambda_0 u^{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^{k+n-1}(x) = 0_E$. Or $u^{n-1}(x) \neq 0$ et donc $\lambda_0 = 0$.

Hérédité :

Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$, on suppose que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$, montrons qu'alors $\lambda_{j+1} = 0$.

On a $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda u^k(x) = 0$, d'où, en appliquant u^{n-j-2}, par linéarité $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda_k u^{k+n-j-2}(x) = 0$

Or $u^n = 0$ d'où $u^{k+n-j-2}(x) = 0_E$ si $n+k-j-2 \geqslant n$, i.e. si $k \geqslant j+2$.

Ainsi $\lambda_{j+1} u^{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda u^{k+n-j-2}(x) = 0_E$. Or $u^{n-1}(x) \neq 0$ et donc $\lambda_{j+1} = 0$.

Ce qui prouve la propriété au rang $j+1$ et achève la récurrence.

On a ainsi $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1}$, la famille $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est donc libre et ainsi c'est une base de E.

Finalement $\boxed{u \text{ est cyclique.}}$

> **Question 2.**
> On retrouve le résultat de la question 2. puisque $\varphi^{n+1} = 0$ et $\varphi^n \neq 0$.

4. Soit φ un endomorphisme cyclique de E et $x \in E$ tel que $(x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x))$ soit une base de E.

   Il existe alors $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi^n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(x)$.

   $\boxed{\text{Dans la base } \mathcal{B} = (x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{n-1}(x)) \text{ la matrice de } \varphi \text{ est alors}}$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}}$$

5. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(\varphi) &= \mathrm{Rang}\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{cases} n & \text{si } a_1 \neq 0 \\ n-1 & \text{si } a_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\mathrm{Rang}(\varphi) \geqslant n-1.}$

Corrigé de l'exercice 4

1. Notons $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5)$.

   Soit $x = ae_1 + be_2 \in F$ alors $f(x) = (a+b)e_3 + (2a+3b)e_4 - e_5 \in G$.

   Soit $y = \alpha e_3 + \beta e_4 + \gamma e_5 \in G$ alors $f(y) = (-\alpha + 2\beta + \gamma)e_1 + (4\beta + 2\gamma)e_2 \in F$.

   De plus comme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de E adaptée à la somme $F + G$ on a bien $E = F \oplus G$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ vérifie } (\mathcal{P}2).}$

2. (a) Soit $x \in E$, on écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On a alors $x_F = p(x)$ par définition.

   Ainsi $a(x) = u(p(x)) = a(x_F) \in G$ car $x_F \in F$.

   De plus, comme $a(x) \in G = \mathrm{Ker}(p)$ alors $p(a(x)) = 0_E$ et donc $a^2(x) = u(p(a(x))) = 0_E$.

   On a donc bien $\boxed{a(x) \in G \text{ et } a^2(x) = 0_E.}$

(b) Notons $b = u - a = u - u \circ p = u \circ (\mathrm{Id}_E - p)$

Soit $x =\in E$, on écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$

Alors $(\mathrm{Id}_E - p)(x) = x_G$, d'où $b(x) = u(x_G) \in F$.

Ainsi $(\mathrm{Id}_E - p)(b(x)) = 0_E$ car $b(x) \in F$, d'où $b^2(x) = 0_E$

On a finalement écrit $u = a + b$ avec $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$, i.e. $\boxed{u \text{ vérifie } (\mathcal{P}1).}$

3. (a) On a $a^2 = 0$ d'où $\boxed{\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Ker}(a).}$

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(a)$.

Soit alors $y \in E$ tel que $x = a(y)$, alors $u(x) = a(x) + b(x) = a^2(y) + b(a(y)) = b(a(y)) \in \mathrm{Im}(b)$.

(c) Soit $x \in \mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b)$, et soit $(y, z) \in E^2$ tel que $x = a(y) = b(z)$ alors

$$u(x) = a(x) + b(x) = a(a(y)) + b(b(z)) = 0_E + 0_E$$

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(u)$, or u est bijectif donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, d'où $x = 0_E$.

On a donc bien $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) = \{0_E\}$.

(d) Soit $x \in \mathrm{Im}(a + b)$, il existe alors y tel que $x = (a + b)(y)$, d'où $x = a(y) + b(y) \in \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(a + b) \subset \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b).}$

(e) On sait que $\mathrm{Im}(a+b) \subset \mathrm{Im}(a)+\mathrm{Im}(b) \subset E$. Or $\mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Im}(u) = E$ car u est bijectif. Ainsi $\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b) = E$.

De plus $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) = \{0_E\}$ ainsi $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Im}(b)$

On a montré à la question (b) que, pour $x \in \mathrm{Im}(a)$, $u(x) \in \mathrm{Im}(b)$. De même pour $x \in \mathrm{Im}(b)$, $u(x) \in \mathrm{Im}(a)$

En notant $F = \mathrm{Im}(a)$ et $G = \mathrm{Im}(b)$ on en déduit que $\boxed{u \text{ vérifie } (\mathcal{P}2).}$

4. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.

Si $x \in F$ on a $u^2(x) = 0_E$ d'où $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$ alors $u(x) = 0_E \in F$.

Ainsi $\boxed{u \text{ vérifie } (\mathcal{P}2).}$

Même question

Il n'arrive pratiquement jamais que la même question se retrouve dans deux exercices d'un même sujet. Dans ce cas particulier il s'agit par contre d'une question très classique qu'il est bon de savoir refaire.

5. (a) Comme il s'agit d'une famille de cardinal n dans E qui est dimension n il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E$.

On va montrer par récurrence forte que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

<u>Initialisation :</u>

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k(x_0) = 0$, d'où, en appliquant u^{n-1}, par linéarité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{k+n-1}(x_0) = 0$

Or $u^n = 0$ d'où $u^{n+k-1}(x_0) = 0_E$ si $n + k - 1 \geqslant n$, i.e. si $k \geqslant 1$.

Ainsi $\lambda_0 u^{n-1}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^{k+n-1}(x_0) = 0_E$. Or $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ et donc $\lambda_0 = 0$.

<u>Hérédité :</u>

Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$, on suppose que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$, montrons qu'alors $\lambda_{j+1} = 0$.

On a $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda u^k(x_0) = 0$, d'où, en appliquant u^{n-j-2}, par linéarité $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda_k u^{k+n-j-2}(x_0) = 0$

Or $u^n = 0$ d'où $u^{k+n-j-2}(x_0) = 0_E$ si $n + k - j - 2 \geqslant n$, i.e. si $k \geqslant j + 2$.

Ainsi $\lambda_{j+1} u^{n-1}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda u^{k+n-j-2}(x_0) = 0_E$. Or $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ et donc $\lambda_{j+1} = 0$.

Ce qui prouve la propriété au rang $j+1$ et achève la récurrence.

On a ainsi $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1}$, la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est donc libre et ainsi $\boxed{\text{c'est une base de } E}$.

(b) Posons $F = \mathrm{Vect}(x_0, u^2(x_0), \ldots, u^{2m-2}(x_0))$ et $G = \mathrm{Vect}(u(x_0), u^3(x_0), \ldots, u^{2m-1}(x_0))$

La base $\mathcal{B}' = \left(x_0, u^2(x_0), \ldots, u^{2m-2}(x_0), u(x_0), u^3(x_0), \ldots, u^{2m-1}(x_0)\right)$ est adaptée à $F+G$, d'où $E = F \oplus G$.

Soit $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k u^{2k}(x_0) \in F$ alors $u(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k u^{2k+1}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k u^{2k+1}(x_0) \in F$

Soit $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k u^{2k+1}(x_0) \in G$ alors $u(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a_k u^{2k+2}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{k-1} u^{2k}(x_0) \in F$

Ainsi $\boxed{u \text{ vérifie } (\mathcal{P}2).}$